ALGORITHMES DE RELAXATION DE CONTRAINTES POUR LE PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE SYMÉTRIQUE ET SES EXTENSIONS

Gilbert Laporte**
et
Yves Nobert***

Ce travail a été réalisé grâce à des subventions du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie (subvention A4747) et du fonds F.C.A.C. (subvention 83EQ0428).

** Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Montréal
5255, av. Decelles, Montréal, Canada H3T 1V6.

*** Département des Sciences administratives, Université du Québec à Montréal,
1495, rue Saint-Denis, Montréal, Canada H3C 3P8

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #306
Ecole des Hautes Etudes Commerciales - Publication #G83-02

Février 1983

Dépôt légal - 3e trimestre 1983

RESUME

Le problème du voyageur de commerce (PVC) symétrique consiste à déterminer le cycle le plus court passant exactement une fois par chacun des noeuds d'un graphe non-orienté. Ce problème possède de nombreuses applications pratiques; leur étude a donné lieu à la définition d'une multitude d'extensions du PVC dont certaines ont acquis leur notoriété propre. En recherche opérationnelle, l'étude du PVC symétrique a suscité l'élaboration de plusieurs algorithmes dont les plus efficaces utilisent la programmation linéaire en nombres entiers. Cet article trace l'évolution des méthodes de programmation linéaire en nombres entiers, et en particulier de celles qui utilisent la relaxation de contraintes, pour la résolution du PVC symétrique et de quelques unes de ses extensions.

1. INTRODUCTION

La mathématique et la plupart des sciences exactes recèlent un bon nombre de conjectures et problèmes dont la simplicité de la formulation est parfois déconcertante mais auxquels se butent les chercheurs. C'est le cas du problème du voyageur de commerce (PVC) en recherche opérationnelle. Selon son interprétation la plus fréquente, ce problème consiste à déterminer l'itinéraire de distance minimale d'un voyageur de commerce qui, partant d'une ville appelée le *dépôt*, doit visiter n-1 autres villes une et une seule fois chacune et revenir à son point de départ. On supposera qu'il existe un lien direct de distance c_{ij} entre chaque paire de villes et l'on ne considérera ici que le cas symétrique du PVC, c'est-à-dire celui où $c_{ij} = c_{ji}$ pour tout $i,j = 1,\ldots,n$. (Les structures du PVC symétrique et asymétrique diffèrent assez l'une de l'autre pour qu'il soit préférable de traiter ces deux problèmes séparément.) Il est facile de vérifier que le nombre de solutions réalisables au PVC (symétrique) s'élève à $\frac{1}{2}(n-1)!$ et qu'à moins que n soit très petit, il ne saurait être question de les énumérer toutes afin de déterminer la meilleure. En fait, le PVC appartient à la classe des problèmes NP-complets [22], ceux pour lesquels on ne connaît aucune méthode de résolution requérant un nombre d'étapes borné supérieurement par une fonction polynomiale de la taille du problème. Mentionnons à titre indicatif, qu'à ce jour, malgré les progrès remarquables accomplis au cours des dernières années, on a résolu très peu de problèmes de plus de 120 villes. (Le cas du PVC asymétrique est différent: l'algorithme de Balas et de Christofides [1] permet la résolution de problèmes allant jusqu'à 325 villes.) On voit donc que malgré sa simplicité apparente, le PVC pose un défi de taille.

Le PVC a fait couler beaucoup d'encre; son apparition dans la littérature scientifique semble remonter à 1932 [35] mais ce n'est qu'en 1954 [10] qu'on en a entrepris l'étude de façon soutenue. Il s'agit peut-être du problème auquel on a consacré le plus d'efforts en recherche opérationnelle. Cette popularité s'explique nul doute par le contraste entre la formulation simple du problème et sa difficulté de résolution, mais aussi par le fait qu'il

se retrouve au coeur de plusieurs problèmes combinatoires et situations pratiques, la plupart reliées à la gestion de la distribution, aux transports et à la construction d'horaires de production et de travail. L'étude de ces problèmes pratiques a donné lieu à la définition d'une multitude d'extensions du PVC dont certaines ont acquis leur notoriété propre. Mentionnons entre autres:

* le problème des m voyageurs de commerce (m-PVC) [14,26]: il s'agit d'une généralisation du PVC dans laquelle m voyageurs de commerce se partagent la visite des villes. Toutes les tournées commencent et se terminent au même dépôt;

* le problème des m voyageurs de commerce avec contraintes de distance ou de capacité [30,28]: dans le premier cas, la distance que peut parcourir chaque voyageur est bornée supérieurement; dans le deuxième cas, on attribue à chaque ville i un poids d_i et l'on exige que chacune d'elles soit visitée une et une seule fois par un véhicule de capacité D-la somme des poids de chaque route ne doit pas dépasser D. Il existe bien sûr, des problèmes dans lesquels se retrouvent simultanément ces deux types de contraintes (voir par exemple [7]);

* le problème des m voyageurs de commerce avec dépôt variable [27]: comme dans le m-PVC, il y a m voyageurs de commerce au lieu d'un seul mais ici, la localisation du dépôt n'est pas connue à l'avance; le problème consiste à déterminer simultanément la localisation du dépôt et les itinéraires de façon à minimiser la distance totale parcourue;

* le problème des m voyageurs de commerce avec p dépôts [31]: on remplace ici le dépôt unique par p dépôts dont la localisation est connue à l'avance; il s'agit d'affecter les m voyageurs de commerce aux dépôts et d'établir leur itinéraire;

* la famille de problèmes consistant à déterminer simultanément la localisation de p dépôts et l'itinéraire optimal de m voyageurs de commerce; les deux extensions précédentes en constituent des cas particuliers [32].

Notons qu'en pratique, il n'existe pas toujours de lien direct entre chaque paire de villes et donc possiblement aucune solution au PVC; et même lorsque tous ces liens existent, il n'est pas nécessairement économique de passer une et une seule fois par chacune des villes. Ceci nous amène donc à définir une autre version du PVC et de ses extensions dans laquelle on requiert que chaque ville soit visitée *au moins* une fois. L'étude de ces problèmes exige un traitement particulier (voir par exemple [12,13,25,39]) que le manque d'espace nous empêche malheureusement de décrire dans cet article.

La liste des extensions présentées ici n'est évidemment pas exhaustive. Elle couvre cependant les cas les plus importants; tous ont d'ailleurs été traités par les auteurs et nous y reviendrons dans la suite de cet article. Le lecteur davantage intéressé aux extensions du PVC gagnerait à consulter des études et bibliographies récentes [4,5,40].

Les méthodes de résolution du PVC symétrique et de ses extensions font appel à plusieurs des techniques de la recherche opérationnelle (méthodes de "branch-and-bound" [33], programmation dynamique [20], programmation linéaire en nombres entiers [14,21,43], etc.) et l'on peut même affirmer que l'étude du PVC a catalysé le développement ou le raffinement de certaines de ces techniques [19]. Il est hors de notre propos de passer en revue la gamme des méthodes employées pour résoudre le PVC (voir à ce sujet [2,19,36,40]); nous nous concentrerons plutôt sur l'utilisation de la programmation linéaire en nombres entiers pour la résolution du PVC symétrique et de ses extensions. Il s'agit là d'une des méthodes les plus fréquemment utilisées et des plus compétitives [6] pour ces problèmes. Contrairement à certaines techniques, la programmation linéaire en nombres entiers permet d'aborder de façon unifiée le PVC ainsi que plusieurs de ses extensions; elle offre par surcroît une très grande flexibilité tant au plan de la formulation des problèmes qu'à celui de leur résolution. Elle constitue à nos yeux la méthode offrant le plus de chances de succès de résoudre de façon optimale des PVC de grande taille.

2. L'utilisation de la programmation linéaire en nombres entiers pour la résolution du PVC symétrique

On formule souvent le PVC à l'aide de la théorie des graphes. (Consulter [3] pour la notation.) Soit G = (N,A) un graphe non orienté où l'ensemble N = {1,...,n} des noeuds correspond aux villes et l'ensemble A des arêtes correspond aux liens entre les villes. Comme le graphe est non orienté, les arêtes ne sont définies que pour $i < j$. A chaque arête (i,j), on fait correspondre une distance c_{ij}.

Toute solution réalisable ou *tour* pour le PVC est un sous-graphe G' = (N,A') de G tel que

(i) le degré de chaque noeud est égal à 2;
(ii) G' est connexe.

La solution optimale correspond au sous-graphe G' possédant ces deux propriétés et dont la somme des distances associées aux arêtes est minimale.

La programmation linéaire en nombres entiers permet d'identifier ce sous-graphe optimal. Soit x_{ij} $(i < j)$ une variable indiquant le nombre de fois que l'arête (i,j) est utilisée dans la solution optimale. (Dans le PVC, x_{ij} ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, mais dans les extensions décrites plus loin, cette variable peut parfois être égale à 2). On utilisera de plus, dans la suite du texte, les notations suivantes:

(1) $\lceil r \rceil$ = le plus petit entier supérieur ou égal à r si $r > 0$
1 si $r \leq 0$

(2) $\overline{S} = N - S$

On formule le PVC comme suit:

(P1) minimiser $\sum c_{ij} x_{ij}$

assujettie à

(3) $\sum_i x_{ik} + \sum_j x_{kj} = 2$ $(k \in N)$

(4) $\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$ $(S \subset N)$

(5) $x_{ij} = 0$ ou 1 $(i,j \in N)$

Dans cette formulation, les contraintes (3) sont des *contraintes de degré*: elles stipulent que le degré de chaque noeud est égal à 2. Les contraintes (5) sont appelées *contraintes d'intégrité*. Les contraintes (4) sont des *contraintes d'élimination de sous-tours* (un *sous-tour* est un tour sur un sous-graphe $G' = (S,A')$ où $S \subset N$): elles assurent que la solution correspond à un sous-graphe connexe; il est facile de démontrer [10] que lorsque les contraintes de degré sont satisfaites, les contraintes (4) sont en fait équivalentes à

(6) $\sum_{i \in S,\ j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 2$ $(S \subset N)$
ou $i \in \bar{S},\ j \in S$

i.e. chaque sous-ensemble propre de N doit être relié à son complément par au moins 2 arêtes et donc G' sera connexe. Il s'avérera ultérieurement utile de faire appel au résultat plus général suivant dont la preuve est similaire à celle de l'équivalence précédente (voir [40], p. 48).

Proposition 1: Soit r un nombre réel, $S \subset N$ et supposons que les contraintes (3) sont satisfaites pour tout $k \in S$. Alors, les contraintes (7) et (8) sont équivalentes:

(7) $\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - r$ $(S \subset N)$

(8) $\sum_{i \in S,\ j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 2r$ $(S \subset N)$
ou $i \in \bar{S},\ j \in S$

Le modèle (P1) fut utilisé pour la première fois par Dantzig et al. en 1954 [10] pour la résolution d'un PVC de 42 villes. Leur algorithme débute avec les contraintes (3) seulement et avec une solution de base associée à un tour sur G. Des itérations du simplex sont par la suite effectuées afin de diminuer le coût de la solution de base initiale; toutefois, lorsqu'une variable hors-base doit entrer dans la base, elle y entre à un niveau entier. Un sous-tour peut alors survenir: on ajoute alors une contrainte de type (4) rendant irréalisable la nouvelle solution de base obtenue. Des itérations duales sont alors effectuées de façon à obtenir une nouvelle solution de base réalisable entière et correspondant à un tour. Le processus se poursuit de façon analogue avec ce tour. Après quelques itérations, Dantzig et al. ont pu prouver l'optimalité de leur solution par des arguments graphiques et heuristiques.

Les travaux pionniers de Dantzig et al. se sont avérés d'une importance capitale car ils contiennent l'idée de base utilisée par la suite par toute une lignée de chercheurs: celle de la résolution d'un programme linéaire en nombres entiers par *relaxation de contraintes*. Cette méthode consiste à résoudre un premier *problème relaxé* contenant un nombre restreint de contraintes et à y ajouter graduellement les contraintes non explicitement présentes à mesure que l'on découvre qu'elles sont violées. Le succès de ce type d'approche dépend de deux conditions importantes, toutes deux satisfaites dans le cas du PVC:

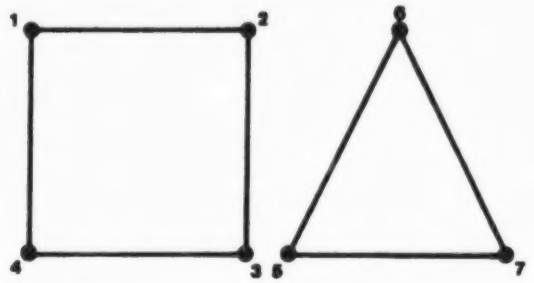
(i) qu'il sera nécessaire d'engendrer qu'un nombre relativement restreint de contraintes. Le nombre des contraintes de type (4) est de l'ordre de 2^n; or, en pratique, pour des problèmes de 100 villes par exemple, on en engendre rarement plus d'une dizaine ;

(ii) qu'il sera facile d'identifier les contraintes violées sans avoir à les vérifier une à une. Dans le PVC, on représente graphiquement la solution du problème relaxé: à chaque sous-tour correspond une contrainte de type (4) non satisfaite. Ainsi, dans l'exemple de la figure 1, on introduirait la contrainte suivante pour éliminer le premier sous-tour:

$$(9) \qquad x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,4} \leq 4 - 1$$

FIGURE 1

Solution d'un problème relaxé contenant deux sous-tours



La validité de l'approche repose sur le fait que les contraintes ainsi introduites en cours de route demeurent valides tout au long du processus: elles ne doivent en aucun cas éliminer la solution optimale. C'est le cas des coupes de Gomory et des contraintes de peigne décrites plus loin.

L'article de Gomory en 1963 [15] marque une autre étape dans l'utilisation de la programmation linéaire en nombres entiers pour résoudre le PVC. Les contraintes qu'il a mises au point (*coupes de Gomory*) permettent d'éliminer des solutions fractionnaires optimales que l'on obtient en résolvant un programme linéaire tout entier par la méthode du simplex. Ces coupes conduisirent à de nouveaux algorithmes pour résoudre des problèmes en nombres entiers dont l'algorithme euclidien accéléré de Martin [34]. Ce dernier utilisa son algorithme sur le même PVC que celui traité par Dantzig et al. et d'une manière fort similaire à ceux-ci: il trouve en premier lieu la solution optimale entière pour un ensemble de contraintes initiales composées des 42 contraintes de degré et de 41 contraintes sur les sous-tours, celles-ci ayant été choisies de façon à éliminer les sous-tours les plus susceptibles de se former. S'il y a encore des sous-tours dans la solution, il engendre les contraintes appropriées pour les éliminer et obtient ensuite une solution entière satisfaisant aussi ces nouvelles contraintes, ajoutant au besoin des coupes de Gomory. Martin parvint de cette façon à

trouver le tour optimal pour le problème de Dantzig et al. en 353 itérations du simplex, engendrant 10 coupes de Gomory et 9 contraintes d'élimination de sous-tours en plus de ses 83 contraintes initiales. Si on se réfère au nombre potentiel de contraintes dans un PVC de 42 villes, c'est un véritable succès.

En 1975, Miliotis [36] tente de nouveau une approche semblable à celle de Dantzig et al. pour le PVC. Il utilise une version en arithmétique entière qu'il a mise au point pour le programme MIF contenu dans le code de Land et Powell [24]. Miliotis implantera et testera 2 variantes de la procédure précédente pour résoudre le PVC. Dans chacune de celles-ci, il relaxe au début les contraintes d'intégrité sur les variables ainsi que les contraintes servant à éliminer les sous-tours, ne conservant que les contraintes de degré. Ces deux variantes se différencient par l'ordre dans lequel l'intégrité sur les variables et la connexité du graphe sont obtenues. Dans la première variante l'intégrité est tout d'abord obtenue et ensuite, la connexité du graphe. La deuxième variante est tout simplement l'inverse de la première. Les 2 variantes de l'algorithme de Miliotis sont très similaires à la méthode de Martin [34]. Contrairement à ce dernier toutefois, Miliotis utilise le code de Land et Powell qui permet d'effectuer tout le travail dans un même passage sur ordinateur. La deuxième variante s'est avérée supérieure à la première. Miliotis a pu résoudre avec celle-ci un PVC de 90 villes en 34 secondes sur une CDC 7600 [38]. Miliotis n'engendre qu'une seule coupe pour éliminer une solution fractionnaire. En fait, pour chaque variable prenant une valeur fractionnaire dans la solution considérée, on peut calculer une coupe de Gomory rendant cette solution irréalisable. Miliotis devait donc choisir la "meilleure" parmi les coupes possibles. Les détails de la génération de la meilleure coupe de Gomory sont décrits dans [36].

Land [23] a amélioré en 1979 la deuxième variante de l'algorithme de Miliotis en lui incorporant les modifications suivantes. Tout d'abord le problème linéaire contenant uniquement les contraintes de degré est résolu sur un sous-ensemble des variables x_{ij}. Celles qui sont choisies prennent la valeur 1 dans un tour trouvé de façon heuristique ou bien sont susceptibles de faire partie du tour optimal. Par la suite la procédure de Miliotis est exécutée sur ce sous-ensemble de variables tant que des contraintes sont ajoutées au modèle pour imposer l'intégrité des variables ou la connexité du graphe. Lorsqu'un tour optimal est trouvé, les coûts relatifs des variables non considérées sont calculés et s'il n'y a pas optimalité globale, d'autres variables sont ajoutées au modèle et la procédure continue de façon similaire. Notons que Land utilise quelquefois, en plus des coupes de Gomory, des contraintes de "2-matching" [11] pour éliminer des solutions fractionnaires. Il s'agit en fait d'un cas particulier des contraintes (14) présentées plus loin. Plusieurs problèmes de 100 villes ont été résolus de façon optimale par cet algorithme.

Grötschel et Padberg [18] ont analysé la structure faciale dans $\mathbb{R}^m$ (où $m = \frac{1}{2}n(n-1)$) de l'enveloppe convexe Q des tours du PVC symétrique. Ils ont démontré en particulier que chacune des contraintes de type (4) définit une facette de Q si $n \geq 4$. (La définition des termes tels que enveloppe convexe, facette, etc. est donnée dans [42].). Ce résultat explique pourquoi très peu de coupes de Gomory sont en général nécessaires pour atteindre une solution entière lorsqu'on utilise un algorithme de relaxation des contraintes de sous-tours et d'intégrité pour résoudre le PVC symétrique. En fait, chaque contrainte de type (4) ajoutée au modèle, en plus de forcer la connexité sur le graphe, sert aussi à imposer l'intégrité sur les variables car elle constitue une facette de Q.

Il existe, à part les contraintes (4), d'autres contraintes pour éliminer les sous-tours. Chvátal [8] a mis au point une nouvelle forme de telles contraintes appelées les *contraintes de peigne* ("comb inequalities") que Grötshel et Padberg [17] ont par la suite généralisées. L'aspect intéressant de ces contraintes généralisées est qu'elles constituent elles aussi, tout comme les

contraintes de Chvátal, des facettes de Q, tel que l'ont démontré Grötschel et Padberg [18]. Nous donnons ici, sans en démontrer la validité, une description des contraintes de peigne généralisées. Soit W_ℓ $(\ell = 0,\ldots,k)$ des sous-ensembles de N tels que

(10) $|W_0 \cap W_\ell| \geq 1$ $\quad (\ell = 1,\ldots,k)$

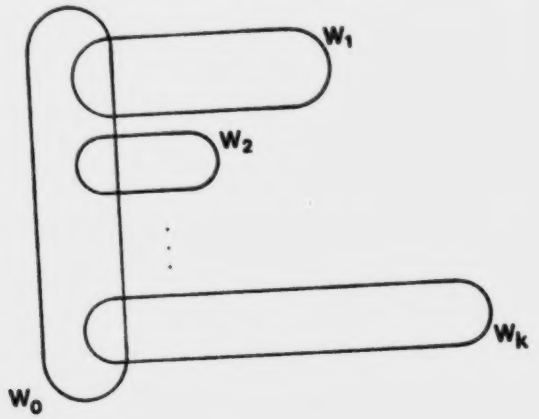
(11) $|W_\ell - W_0| \geq 1$ $\quad (\ell = 1,\ldots,k)$

(12) $|W_\ell \cap W_{\ell'}| = 0$ $\quad (1 \leq \ell < \ell' < k)$

(13) k impair

et soit $A(W_\ell)$, l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à W_ℓ. Alors $C = \bigcup_{\ell=0}^{k} A(W_\ell)$ définit un peigne dont W_0 est le manche et dont les $W_\ell (\ell = 1,\ldots,k)$ sont les dents (voir figure 2).

FIGURE 2: Illustration d'un peigne



Grötschel et Padberg ont prouvé que dans toute solution réalisable au PVC, la contrainte suivante (dite inégalité de peigne généralisée) doit être satisfaite:

$$(14) \qquad \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{i,j \in W_\ell} x_{ij} \leq |W_0| + \sum_{\ell=1}^{k} (|W_\ell| - 1) - \lceil \tfrac{1}{2}k \rceil$$

On obtient les contraintes de peigne de Chvátal en imposant l'égalité dans (10) et en éliminant les conditions (12) et (13); pour les contraintes de "2-matching" d'Edmonds, on impose l'égalité dans (10) et (11); finalement, les contraintes d'élimination de sous-tours (4) constituent un cas particulier de (14) où $k = 1$, $|W_0| = 1$ et $W_1 = S$.

A la suite des travaux de Grötschel et Padberg sur Q, l'utilisation des contraintes de peigne généralisées (incluant les contraintes de Chvátal) devint aussi possible dans la procédure de résolution du PVC. Ainsi, en 1980, Grötschel [16] les utilise pour résoudre un PVC de 120 villes. Par la suite Padberg et Hong [41] ont donné des résultats de tests sur 74 problèmes contenant de 15 à 318 villes. L'optimalité a pu être prouvée pour 58 d'entre eux. En outre, pour le problème de 318 villes, le seul de taille supérieure à 120 parmi ceux qui furent testés, un tour à 99.75% optimal a été trouvé. Finalement Crowder et Padberg [9] ont repris l'analyse des résultats de [41] en effectuant aussi de nouveaux passages sur ordinateur pour le problème de 318 villes. Les itérations ont débuté avec le tour à 99.75% optimal précédemment trouvé et l'optimalité a finalement été atteinte. Il s'agit à notre connaissance du PVC symétrique de plus grande taille jamais résolu de façon optimale.

Ce bref historique aura permis de constater les progrès énormes accomplis dans l'utilisation de la programmation linéaire en nombres entiers pour la résolution du PVC, et en particulier, dans l'utilisation de la méthode de relaxation de contraintes. En plus d'être efficace, cette technique offre aussi le précieux avantage d'être flexible et de s'adapter sans trop de difficulté à une famille de problèmes possédant une structure similaire à celle du PVC. C'est ce que confirment les résultats obtenus par les auteurs au cours des dernières années, lors de l'étude de plusieurs extensions du PVC. Nous en donnons un aperçu dans la suite du présent article.

3. Formulation par la programmation linéaire en nombres entiers de certaines extensions du PVC symétrique

Notre étude des extensions du PVC s'inscrit dans la continuité des travaux décrits plus haut, et en particulier de ceux de Miliotis [36-38].
Les modèles et algorithmes que nous avons mis au point utilisent des constraintes d'élimination de sous-tours adaptées à chaque problème et, dans un cas particulier, des contraintes dites d'élimination de chaînes. Bien qu'il soit parfois possible, d'adapter les contraintes de peigne de Grötschel et Padberg à nos

modèles (voir [29]), nous ne les avons pas utilisées dans nos travaux. Nous présentons dans cette section les formulations des principales extensions du PVC et, dans la section suivante, un aperçu des algorithmes mis au point pour leur résolution.

3.1 Le problème des m voyageurs de commerce (m-PVC)

Dans ce problème, il y a m voyageurs localisés à la ville 1 (le dépôt) et chacune des n-1 autres villes est visitée une seule fois par un seul voyageur. Lorsque la valeur de m est déterminée a priori, on dira que m est *fixe*; sinon on dira que m est *libre*. Dans ce dernier cas, on peut imposer des bornes $\underline{m}$ et $\overline{m}$ sur la valeur de m:

$$(15) \qquad 1 \leq \underline{m} \leq m \leq \overline{m} \leq n-1$$

Certaines méthodes (voir [40], chapitre 3) permettent de transformer un m-PVC sur n villes en un 1-PVC sur n' villes où la valeur de n' est généralement égale à $n + m - 1$ lorsque m est fixe et à $n + \overline{m} - 1$ lorsque m est libre. A moins que m soit fixe et petit ou qu'une petite valeur de $\overline{m}$ soit connue, ces transformations ont le désavantage d'accroître indûment la taille du problème à résoudre. Notre méthode permet d'aborder le m-PVC directement. La formulation suivante ne requiert que des modifications mineures à celle du 1-PVC et les explications que nous en donnerons seront conséquemment plus succinctes:

(P2) minimiser $\sum c_{ij}x_{ij}$

assujettie à

$$(16) \qquad \sum_{j=2}^{n} x_{1j} = 2m$$

$$(17) \qquad \sum_{i} x_{ik} + \sum_{j} x_{kj} = 2 \qquad (k \in N-\{1\})$$

$$(18) \qquad \sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad (S \subseteq N-\{1\})$$

(19) $x_{ij} = 0$ ou 1 $\qquad (i,j \in N-\{1\})$

(20) $x_{1j} = 0,1$ ou 2 $\qquad (j \in N-\{1\})$

(21) $\underline{m} \leq m \leq \bar{m}$

Remarquer que si m est libre, alors m est une variable dans (16) (sinon, m est une constante); que si m est libre et que si la condition suivante est satisfaite,

(22) $c_{1i} + c_{1j} \geq c_{ij} \qquad (i,j \in N - \{1\})$

alors il existe une solution optimale de (P2) pour laquelle $m = 1$. Dans ce cas, le m-PVC est équivalent au 1-PVC. On note enfin que la contrainte (20) permet d'effectuer des voyages aller-retour entre le dépôt et les autres villes.

3.2 Le problème des m voyageurs de commerce avec contraintes de capacité ou de distance

On trouvera commode ici de remplacer les voyageurs de commerce par des véhicules de même capacité D. Supposons d'abord qu'un poids non-négatif d_i soit associé à chaque ville i et que $d_1 = 0$. Comme dans le m-PVC, la visite des villes s'effectue à l'aide de m véhicules mais la somme des poids associés aux villes visitées par chaque véhicule ne peut excéder D. La formulation de ce problème est semblable à la précédente sauf que les contraintes d'élimination de sous-tours (les contraintes (18)) sont remplacées par

(23) $$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} d_i}{D} \right\rceil \qquad (S \subseteq N - \{1\})$$

Pour se convaincre de la validité de ces contraintes, il suffit de remarquer que tout sous-ensemble S de villes ($1 \notin S$) doit recevoir la visite d'au moins $\left\lceil \frac{\sum_{i \in S} d_i}{D} \right\rceil$ véhicules. Le nombre total de trajets s'effectuant de S à $\bar{S}$ et de $\bar{S}$ à S sera donc supérieur ou égal à deux fois ce nombre minimum. On peut donc écrire

$$(24) \qquad \sum_{\substack{i\in S,\ j\in \bar{S} \text{ ou} \\ i\in \bar{S},\ j\in S}} x_{ij} \geq 2\left\lceil \frac{\sum_{i\in S} d_i}{D} \right\rceil$$

ce qui, par la proposition 1, est équivalent à (23).

On peut de plus démontrer [28] que lorsque m est libre et que la condition (22) est vérifiée, le nombre de véhicules utilisés dans la solution optimale est borné supérieurement par $\left\lceil \frac{2\sum_{i\in N} d_i}{D} - 1 \right\rceil$.

Levons maintenant les restrictions de capacité sur les véhicules et imposons cette fois une borne supérieure L sur la longueur du trajet effectué par chaque véhicule. Les contraintes d'élimination de sous-tours pour ce problème deviennent alors

$$(25) \qquad \sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - V(S) \qquad (S \subseteq N - \{1\})$$

et

$$(26) \qquad \sum_{j\in S-\{1\}} x_{1j} + 2 \sum_{\substack{i\in S-\{1\},\ j\in \bar{S} \text{ ou} \\ i\in \bar{S},\ j\in S-\{1\}}} x_{ij} \geq 3 \qquad \begin{array}{l}(S \subset N,\ 1 \in S \text{ et} \\ \text{la longueur du tour} \\ \text{optimal sur S est} \\ \text{supérieure à L)}\end{array}$$

Dans (25), V(S) représente le nombre minimum de véhicules requis pour visiter les villes de S dans la solution optimale. Les contraintes (25) sont obtenues de façon similaire aux contraintes (23). Noter que dans (25), la valeur de V(S) pour un ensemble S donné n'est pas connue a priori, mais sera déterminée en cours d'algorithme, ce qui rendra la tâche plus complexe (voir [30] à ce sujet). De même, dans (26), on ne sait pas à l'avance si le tour optimal sur un ensemble S donné a une longueur supérieure à L; or, ceci sera également connu lors de l'exécution. Ces contraintes s'expliquent de la façon suivante. Considérons un ensemble S incluant la ville 1 et dont on sait qu'il ne pourra être couvert par un seul véhicule avec une distance inférieure ou égale à L. Trois cas peuvent alors survenir dans la solution optimale:

* S sera partitionné en plusieurs sous-ensembles, chacun visité par un véhicule. La contrainte suivante sera alors respectée:

$$\sum_{j\in S-\{1\}} x_{1j} \geq 4 \tag{27}$$

* exactement un nouveau lien sera créé entre S-{1} et $\bar{S}$, c'est-à-dire

$$\sum_{\substack{i\in S-\{1\},\ j\in\bar{S} \text{ ou} \\ i\in\bar{S},\ j\in S-\{1\}}} x_{ij} = 1 \tag{28}$$

* au moins deux liens seront créés entre S-{1} et $\bar{S}$, c'est-à-dire

$$\sum_{\substack{i\in S-\{1\},\ j\in\bar{S} \text{ ou} \\ i\in\bar{S},\ j\in S-\{1\}}} x_{ij} \geq 2 \tag{29}$$

Dans les trois cas, il est valide d'imposer une contrainte de type (26). Noter que, puisqu'on ne peut avoir simultanément

$$\sum_{j\in S-\{1\}} x_{1j} = 0 \tag{30}$$

et

$$\sum_{\substack{i\in S-\{1\},\ j\in\bar{S} \text{ ou} \\ i\in\bar{S},\ j\in S-\{1\}}} x_{ij} = 1 \tag{31}$$

on peut remplacer (26) par la paire de contraintes suivante (voir la figure 3).

$$\sum_{j\in S-\{1\}} x_{1j} + 3 \sum_{\substack{i\in S-\{1\},\ j\in\bar{S} \text{ ou} \\ i\in\bar{S},\ j\in S-\{1\}}} x_{ij} \geq 4 \tag{32}$$

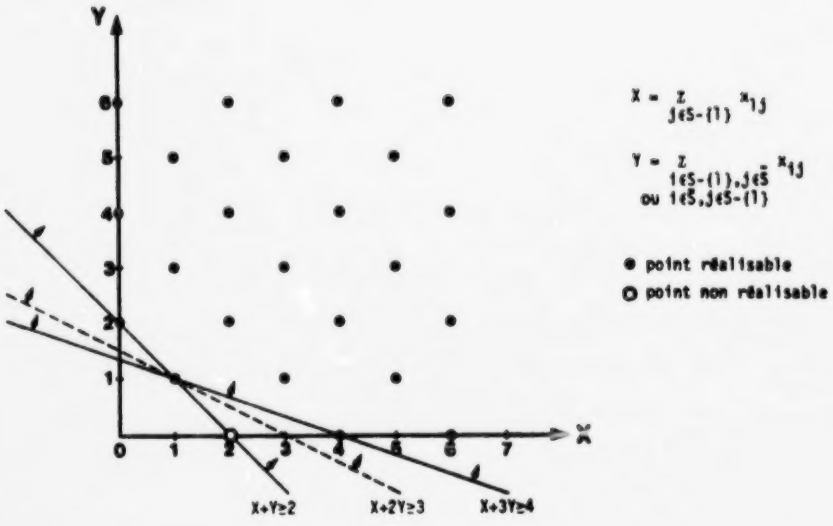
et

$$\sum_{j\in S-\{1\}} x_{1j} + \sum_{\substack{i\in S-\{1\},\ j\in\bar{S} \text{ ou} \\ i\in\bar{S},\ j\in S-\{1\}}} x_{ij} = \sum_{\substack{i\in S-\{1\},\ j\in\overline{S-\{1\}} \text{ ou} \\ i\in\overline{S-\{1\}},\ j\in S-\{1\}}} x_{ij} \geq 2 \tag{33}$$

afin d'éliminer davantage de solutions fractionnaires.

FIGURE 3

Contraintes (26) à (33)



3.3 Le problème des m voyageurs de commerce avec dépôt variable

Ce problème est semblable au m-PVC excepté qu'on doit déterminer simultanément aux itinéraires la localisation du dépôt dans un sous-ensemble K de N. On définira donc une variable binaire y_k dont la valeur sera égale à 1 si le dépôt est situé à la ville k et à 0 autrement. On supposera de plus, dans cette formulation, que m est fixe. Le problème se formule comme suit:

(P3) minimiser $\Sigma\, c_{ij}x_{ij}$

assujettie à

(34) $\sum_{k\in K} y_k = 1$

$$(35)\quad \sum_i x_{ik} + \sum_j x_{kj} = 2 + 2(m-1)y_k \qquad (k \in K)$$

$$(36)\quad \sum_i x_{ik} + \sum_j x_{kj} = 2 \qquad (k \in N-K)$$

$$(37)\quad \sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 + (m-1) \sum_{k\in S\cap K} y_k \qquad (S \subset N)$$

$$(38)\quad x_{ij} = 0,1 \text{ ou } 2 \qquad (i,j \in K)$$

$$(39)\quad x_{ij} = 0,1 \qquad (i,j \in N-K)$$

$$(40)\quad y_k = 0 \text{ ou } 1 \qquad (k \in K)$$

Ici les contraintes d'élimination de sous-tours (les contraintes (37)) s'expliquent de la façon suivante. Soit p la ville où sera situé le dépôt dans la solution optimale et considérons un sous-ensemble propre S de N. Deux cas sont possibles:

* $p \notin S$. Alors le sous-tour formé des villes de S doit être éliminé et l'on peut écrire

$$(41)\quad \sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 = \sum_{i,j\in S} |S| - 1 + (m-1) \sum_{k\in S\cap K} y_k$$

car alors $\sum_{k\in S\cap K} y_k = 0$

* $p \in S$. Si les m voyageurs visitaient seulement des villes de S, on aurait alors

$$(41)\quad \sum_{i,j\in S} x_{ij} = |S| - 1 + m = |S| - 1 + m \sum_{k\in S\cap K} y_k$$

Mais puisque $S \neq N$, il est impossible que les m tours soient tous contenus dans S. On peut donc écrire dans ce cas

$$(43)\quad \sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 + (m-1) = |S| - 1 + (m-1) \sum_{k\in S\cap K} y_k$$

Ainsi, dans les deux cas, les contraintes (37) sont valides. Notons finalement que lorsque les conditions (34), (35) et (36) sont satisfaites, (37) équivaut à

$$(44) \qquad \sum_{\substack{i\in S,\ j\in\bar{S} \text{ ou} \\ j\in S,\ i\in\bar{S}}} x_{ij} \geq 2\Big(1 - \sum_{k\in S\cap K} y_k\Big) \qquad (S \subset N)$$

Cette équivalence est prouvée dans ([40], p.206).

3.4 Le problème des m voyageurs de commerce avec p dépôts

Cette extension du PVC diffère du m-PVC par le nombre de dépôts: il y en a p au lieu d'un seul. Soit $K = \{1,\ldots,p\}$ l'ensemble des dépôts et soit m_k le nombre de voyageurs de commerce rattachés au dépôt k. On doit visiter chaque ville de N-K exactement une fois et aucun voyageur ne peut passer par plus d'un dépôt. Comme dans le, m-PVC, les m_k peuvent être fixes, ou libres et l'on peut même imposer des contraintes du type

$$(45) \qquad \underline{m}_k \leq m_k \leq \bar{m}_k \qquad (k \in K)$$

$$(46) \qquad p \leq \underline{m} \leq \sum_{k=1}^{p} m_k \leq \bar{m}$$

ou

$$(47) \qquad \sum_{k=1}^{p} m_k = \bar{m}$$

Voici la formulation de ce problème:

(P4) minimiser $\Sigma\, c_{ij}x_{ij}$

assujettie à

$$(48) \qquad \sum_i x_{ik} + \sum_j x_{kj} = 2m_k \qquad (k \in K)$$

$$(49) \qquad \sum_i x_{ik} + \sum_j x_{kj} = 2 \qquad (k \in N-K)$$

$$(50) \qquad \sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad (S \subset N,\ S \cap K = \emptyset)$$

$$(51) \quad \sum_{t=1}^{|T|-1} x'_{i_t i_{t+1}} \leq |T| - 2 \qquad (T \subset N,\ |T| \geq 3,\ |T \cap K| = 2\text{ ; pour toute permutation des éléments de T})$$

$$i_t,\ i_{t+1} \in T$$

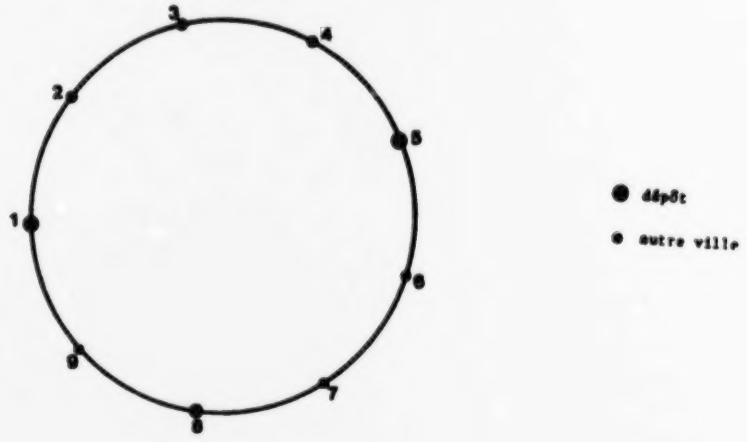
$$\text{où } x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{si } i < j \\ x_{ji} & \text{si } i > j \end{cases}$$

$$(52) \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \qquad (i,j \in N-K)$$

$$(53) \quad x_{ij} = 0,1 \text{ ou } 2 \qquad (i \in N-K,\ j \in K \text{ ou } i \in K,\ j \in N-K)$$

Noter qu'il est inutile de définir x_{ij} lorsque $i,j \in K$. Ce modèle requiert peu d'explications, à l'exception des contraintes (51), appelées *contraintes d'élimination de chaînes*: elles préviennent la formation de chaînes entre deux dépôts. Tout sous-tour contenant ℓ dépôts est éliminé par l'imposition de ℓ contraintes d'élimination de chaîne, une pour chaque paire de dépôts consécutifs. A titre d'exemple, considérons le sous-tour représenté à la figure 4 où 1, 5 et 8 sont des dépôts.

FIGURE 4: Sous-tour illégal contenant 3 dépôts



Le sous-tour est éliminé par l'imposition des trois contraintes suivantes:

$$(54) \quad x_{1,2} + x_{2,3} + x_{3,4} + x_{4,5} \leq 5 - 2$$

(ici $T = \{1,2,3,4,5\}$ et $T \cap K = \{1,8\}$)

(55) $x_{5,6} + x_{6,7} + x_{7,8} \leq 4 - 2$ (ici $T = \{5,6,7,8\}$ et $T \cap K = \{5,8\}$)

(56) $x_{1,9} + x_{8,9} \leq 3 - 2$ (ici $T = \{1,8,9\}$ et $T \cap K = \{1,8\}$)

3.5 Les problèmes impliquant la localisation de dépôts et la construction d'itinéraires

Ces problèmes consistent à localiser simultanément p dépôts dans un sous-ensemble K de N et à construire les itinéraires optimaux. Il s'agit en fait d'une combinaison des deux problèmes précédents. On peut envisager plusieurs cas particuliers de cette classe de problèmes. Les situations les plus importantes ont été décrites dans [32]; le manque d'espace nous empêche d'y revenir dans cet article.

3.6 Conclusion

Nous n'avons présenté qu'un bref aperçu des extensions du PVC et de leur modélisation à l'aide de la programmation linéaire en nombres entiers. Il est intéressant de constater la similarité des structures mathématiques de ces modèles mais aussi, la flexibilité de la programmation linéaire qui permet de tenir compte des particularités propres à chaque problème. Dans la prochaine section nous verrons l'avantage qu'offre ce type de formulation d'un point de vue algorithmique.

4 Résolution des modèles pour le PVC et ses extensions

Les modèles mathématiques que nous avons présentés pour le PVC et ses extensions seraient d'un intérêt moindre si on ne pouvait les traiter au moyen d'algorithmes efficaces. Nous avons indiqué, dans la section 2, qu'il existe de tels algorithmes pour le modèle de Dantzig et al. pour le PVC et comment on les a améliorés au cours des années. Nous présentons ici, à titre comparatif, certains résultats algorithmiques obtenus pour les extensions du PVC.

L'algorithme de base commun que nous utilisons pour tous ces problèmes est le suivant (chaque extension requiert évidemment un traitement particulier dont la description dépasse le cadre de cet article. Le lecteur intéressé peut consulter [26-28,30,31,40]):

Etape 1: Résoudre un problème relaxé ne contenant que les contraintes de degré (et dans (P3), la contrainte (34)) ainsi que les bornes supérieures sur les variables.

Répéter ensuite les étapes 2 et 3 jusqu'à ce que la solution optimale soit obtenue. (Dans la variante 1 (V1), on effectue d'abord l'étape 2; dans la variante 2 (V2), on effectue d'abord l'étape 3.)

Etape 2: Obtenir une solution entière au programme relaxé soit par l'imposition de coupes de Gomory (CG) [15,24] ou par "branch-and-bound" (BB) [24], la meilleure méthode dépendant de la structure de l'extension considérée.

Etape 3: Eliminer de la solution en cours les sous-tours ainsi que les chaînes non admissibles par l'imposition des contraintes appropriées.

Les matrices de distances pour nos problèmes tests sont de deux types:

* *problèmes euclidiens* (E): ceux pour lesquels

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \qquad (i,j,k \in N) \tag{57}$$

Dans ce cas, on obtient les c_{ij} de la façon suivante: on engendre d'abord n points (x_i,y_i) dans $[0,100]^2$ et l'on définit c_{ij} comme

$$c_{ij} = [(x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2]^{1/2} \tag{58}$$

* *problèmes non-euclidiens* (NE): ceux pour lesquels la condition (57) n'est pas respectée. Dans ce cas, les c_{ij} sont engendrés aléatoirement selon une distribution uniforme sur [0,100].

La plupart des études sur le PVC et sur ses extensions [23,26-28,30-32, 36-38,40] démontrent hors de tout doute qu'il importe de distinguer ces deux types de problèmes: les problèmes euclidiens sont de loin les plus difficiles à résoudre.

Dans le cas du m-PVC avec contraintes de capacité, on a engendré les d_i comme les c_{ij} des problèmes non-euclidiens et l'on a ensuite défini D comme

$$D = (1-\alpha) \max_{i=1,\ldots,n} \{d_i\} + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i \qquad (59)$$

où α est un nombre *choisi* dans [0,1], les problèmes les plus difficiles étant ceux pour lesquels α est le plus petit.

Dans le m-PVC avec contraintes de distance, la valeur de L variait de 300 à 1000 pour les problèmes euclidiens et de 125 à 1000 pour les problèmes non-euclidiens. Dans (P3), on a utilisé K = N et dans (P4), |K| variait de 2 à 25, selon la valeur de n.

Nos tests sur ordinateur ont démontré que pour tous les problèmes considérés le nombre de contraintes d'élimination de sous-tours (et de chaînes dans P4) qu'il a fallu engendrer est demeuré relativement bas et a rarement dépassé quelques dizaines (on se rappellera que leur nombre potentiel est de l'ordre de 2^n). Dans tous les cas, la plupart des contraintes de degré étaient effectives dans la solution optimale, ce qui indique qu'il était sage de ne pas les relaxer au début.

Le tableau 1 donne un aperçu des tailles atteintes pour ces problèmes ainsi que des temps CPU requis sur l'ordinateur CYBER 173 de l'Université de Montréal (compilateur FTN5), sauf dans le cas du PVC où le CDC 7600 de l'Université de Londres a été utilisé (compilateur FTN). Dans chacun des cas on indique les résultats correspondant à la meilleure variante (V1 ou V2) et à la meilleure façon d'obtenir l'intégrité (CG ou BB). Le lecteur intéressé aux résultats détaillés devrait consulter les références indiquées dans la colonne "remarques".

Tableau 1: Résultats comparatifs

Type de problème		Taille maximale atteinte	Meilleur temps obtenu	Remarques
1. PVC (P1)	E	80	39.10	V2, CG, voir [38]
	NE	90	34.17	
2. m-PVC (P2)(1)	E	80	283.00 (3)	V2, CG, voir [26]
	NE	100	208.30 (4)	
3. m-PVC (1) (capacités)	E	40	50.25	V1, BB, voir [28] $\alpha = 0.75$
	NE	50	53.30 (4)	
4. m-PVC (1) (distances)	E	60	109.10	V1, CG, voir [30] L = 550 pour E L = 150 pour NE
	NE	60	25.71	
5. m-PVC (2) (dépôt variable)(P3)	E	50	616.50	V1, CG, voir [27] m = 4
	NE	50	321.49	
6. m-PVC (1) (plusieurs dépôts)(P4)	E	60	24.39	V1, BB, voir [31] $\|K\| = 25$ pour E $\|K\| = 20$ pour NE
	NE	50	20.68	

(1) m libre.

(2) m fixe.

(3) Temps moyen sur 2 problèmes. Le m-PVC euclidien est équivalent au 1-PVC.

(4) Temps moyen sur 3 problèmes.

Bibliographie

[1] BALAS, E., CHRISTOFIDES, N.: "A Restricted Lagrangean Approach to the Travelling Salesman Problem", Mathematical Programming, vol.21, pp. 19-46, 1981.

[2] BELLMORE, M., NEMHAUSER, G.L.: "The Travelling Salesman Problem: a Survey", Operations Research, vol.16, pp. 538-558, 1968.

[3] BERGE, C.: "Graphes et hypergraphes, 516 pp., Dunod, 1973.

[4] BODIN, L.D., GOLDEN, B.L.: "Classification in Vehicle Routing and Scheduling", Networks, vol.11, pp. 97-108, 1981.

[5] BODIN, L.D., GOLDEN, B.L., ASSAD, A., BALL, M.: "The State of the Art in Routing and Scheduling of Vehicles and Crews", Report No. UMTA/BMGT/MSS #81-001, U.S. Department of Transportation, Washington D.C., 396 pp., 1981.

[6] CHRISTOFIDES, N.: "The Travelling Salesman Problem", publié dans "Combinatorial Optimization", par Christofides, N. et al., pp. 131-149, Wiley, 1979.

[7] CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A., TOTH, P.: "Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem, Based on Spanning Tree and Shortest Path Relaxations", Mathematical Programming, vol.20, pp.255-282, 1981.

[8] CHVATAL, V.: "Edmonds Polytopes and Weakly Hamiltonian Graphs", Mathematical Programming, vol.5, pp.29-40, 1973.

[9] CROWDER, H., PADBERG, M.W.: "Solving Large-Scale Symmetric Travelling Salesman Problems to Optimality", Management Science, vol.26, pp.495-509, 1980.

[10] DANTZIG, G.B., FULKERSON, D.R., JOHNSON, S.M.: "Solution of a Large Scale Travelling Salesman Problem", Operations Research, vol.2, pp.393-410, 1954.

[11] EDMONDS, J.: "Maximum Matching and a Polyhedron with 0,1 Vertices", Journal of Research of the National Bureau of Standards Sect. B69, pp.125-130, 1965.

[12] FLEISCHMANN, B.: "The Travelling Salesman Problem on a Road Network", Working Paper, University of Hamburg, 1981.

[13] FLEISCHMANN, B.: "Linear Programming Approaches to Travelling Salesman and Vehicle Scheduling Problems", article présenté au XI. International Symposium on Mathematical Programming, Bonn, 1982.

[14] GAVISH, B., SRIKANTH, K.: "An Optimal Solution Method for the Multiple Travelling Salesman Problem", Working Paper no. 8027, Graduate School of Management, University of Rochester, 43 pp., 1982.

[15] GOMORY, R.: "An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs", Recent Advances in Mathematical Programming, pp.269-302, McGraw-Hill, 1963.

[16] GRÖTSCHEL, M.: "On the Symmetric Travelling Salesman Problem: Solution of a 120-City Problem", Mathematical Programming Study, vol. 12, pp.61-77, 1980.

[17] GRÖTSCHEL, M., PADBERG , M.W.: "On the Symmetric Travelling Salesman Problem I: Inequalities", Mathematical Programming, vol.16, pp.265-280, 1979.

[18] GRÖTSCHEL, M., PADBERG, M.W.: "On the Symmetric Travelling Salesman Problem II: Lifting Theorems and Facets", Mathematical Programming, vol.16, pp.281-302, 1979.

[19] HELD, M., "Influences of the Travelling Salesman Problem", article présenté au XI. International Symposium on Mathematical Programming, Bonn, 1982.

[20] HELD, M., KARP, R.M.: "A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems", SIAM 10, pp.196-210, 1962.

[21] HELD, M., KARP, R.M.: "The Travelling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: Part II" Mathematical Programming, vol.1, pp.6-25, 1971.

[22] KARP, R.M.: "Reducibility among Combinatorial Problems", Complexity of Computer Computations, pp.185-204, Plenum Press, 1972.

[23] LAND, A.H.: "The Solution of Some 100-City Travelling Salesman Problems", article présenté au 10e Symposium international de programmation mathématique, Montréal, 1979.

[24] LAND, A.H., POWELL, S.: "FORTRAN Codes for Mathematical Programming: Linear, Quadratic and Discrete", Wiley, 249 pp. 1973.

[25] LAPORTE, G., "An Integer Programming Approach to the Vehicle Scheduling Program", Cahiers du GERAD G-82-10, Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Montréal, 9 pp., 1982.

[26] LAPORTE, G., NOBERT, Y.: "A Cutting Planes Algorithm for the m-Salesmen Problem", Journal of the Operational Research Society, vol.31, pp.1017-1023, 1980.

[27] LAPORTE, G., NOBERT, Y.: "An Exact Algorithm for Minimizing Routing and Operating Costs in Depot Location", European Journal of Operational Research, vol.6, pp.224-226, 1981.

[28] LAPORTE, G., NOBERT, Y.: "A Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem", Cahiers du GERAD G-82-08, Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Montréal, 21 pp., 1982, (à paraître dans Operations Research Spektrum, 1983).

[29] LAPORTE, G., NOBERT, Y.: "Comb Inequalities for the Vehicle Routing Problem", Cahiers du GERAD G-83-01, Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Montréal, 9 pp., 1983.

[30] LAPORTE, G., NOBERT, Y., DESROCHERS, M.: "Two Exact Algorithms for the Distance Constrained Vehicle Routing Problem", Cahiers du GERAD G-82-05, Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Montréal, 19 pp., 1982.

[31] LAPORTE, G., NOBERT, Y., MERCURE, H.: "The Multi-Depot m-Salesmen Problem", Methods of Operations Research, Oelgeschlager, Gunn & Hain Publishers, Cambridge, Massachusetts, pp.367-370, 1981.

[32] LAPORTE, G., NOBERT, Y., PELLETIER, P.: "Hamiltonian Location Problems", European Journal of Operational Research, Vol.12, pp. 82-89, 1983.

[33] LITTLE, D.C., MURTY, K.G., SWEENEY, D.W., KAREL, C.: "An Algorithm for the Travelling Salesman Problem", Operations Research, vol.11, pp.972-989, 1963.

[34] MARTIN, G.: "Solving the Travelling Salesman Problem by Integer Linear Programming", Working Paper, Control Data Corporation, 1966.

[35] MENGER, K.: "Botenproblem", dans "Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums", (Wien 1930), K. Menger, ed., pp.11-12, Heft 2, Leipzig 1932.

[36] MILIOTIS, P.: "Combining Cutting Planes and Branch-and-Bound Methods to Solve Integer Programming Problems: Applications to the Travelling Salesman Problem and the 1-Matching Problem", Ph.D. thesis, University of London, 1975.

[37] MILIOTIS, P.: "Integer Programming Approaches to the Travelling Salesman Problem", Mathematical Programming, vol.10, pp.367-378, 1976.

[38] MILIOTIS, P.: "Using Cutting Planes to Solve the Symmetric Travelling Salesman Problem", Mathematical Programming, vol.15, pp.177-188, 1978.

[39] MILIOTIS, P., LAPORTE, G., NOBERT, Y.: "Computational Comparison of Two Methods for Finding the Shortest Complete Cycle or Circuit in a Graph", RAIRO (recherche opérationnelle), vol.15, pp.233-239, 1931.

[40] NOBERT, Y.: "Construction d'algorithmes optimaux pour des extensions au problème du voyageur de commerce", Thèse de doctorat, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal, 242 pp., 1982.

[41] PADBERG, M.W., HONG, S.: "On the Symmetric Travelling Salesman Problem: A Computational Study", Mathematical Programming Study, vol. 12, pp.78-107, 1980.

[42] STOER, J., WITZGALL, C.: "Convexity and Optimization in Finite Dimensions I", Springer, Berlin, 1970.

[43] VOLGENANT, T., JONKER, R.: "A Branch and Bound Algorithm for the Symmetric Traveling Salesman Problem based on the 1-Tree Relaxation", European Journal of Operational Research, vol.9, pp.83-89, 1982.